APPLIED MECHANICS

DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-046-9-16

КОНСТРУЮВАННЯ КОНГРУЕНТНИХ ЦЕНТРОЇД У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ РІВНЯНЬ ГРУПИ КРИВИХ

Кресан Т. А.
кандидат технічних наук,
докторантка кафедри нарисної геометрії,
комп'ютерної графіки та дизайну
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
м. Київ, Україна

Пилипака С. Ф.
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри нарисної геометрії,
комп'ютерної графіки та дизайну
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
м. Київ, Україна

Петрик А. М.
викладач
ВСП «Ніжинський фаховий коледж Національного університету
біоресурсів і природокористування України»
м. Ніжин, Чернігівська область, Україна

Центроїди є вихідними кривими для проектуванні на їх основі зубчастого зачеплення. Виготовлення некруглих зубчастих коліс є складнішим процесом в порівнянні із круглими колесами, в яких центроїдою завжди є коло. Якщо центроїди конгруентні, то це суттєво знижує трудомісткість виготовлення некруглих зубчастих коліс, оскільки обидва колеса виготовляються за однаковою схемою. В праці [1, с. 298] сказано, що конгруентні центроїди у парних некруглих коліс можна отримати в порівняно рідких випадках. Деякі пари конгруентних центроїд некруглих коліс отримано в праці [2, с. 7].

Дослідження показали, що частковий випадок кочення конгруентних еліпсів можна поширити на всі криві, що описуються полярним рівнянням (1):

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos(n\alpha)}, \tag{1}$$

Доведемо це. Підставимо міжцентрову відстань $r=2p/(1–e^2)$ у вираз кута:

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r+\rho} d\alpha = \int \frac{p}{r - er\cos(n\alpha) - p} d\alpha =$$

$$= \frac{2p}{n\sqrt{r^2(e^2-1)+2pr-p^2}} \operatorname{Arc\,tanh} \frac{(p-r-er)\operatorname{tg}\frac{n\alpha}{2}}{\sqrt{r^2(e^2-1)+2pr-p^2}}, \tag{2}$$

і після спрощень отримаємо:

$$\varphi = \frac{2}{n} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}\frac{n\alpha}{2} \right). \tag{3}$$

Розглянемо дві конгруентні криві при $n=3$ (рис. 1) із спільною точкою дотику T. При обертанні навколо нерухомих точок O і O_1 і після повороту на кути α і φ точки T_1 і T_2 повинні збігтися. Про те, що дуги TT_1 і TT_2 мають рівну довжину і так зрозуміло, оскільки це однакові дуги конгруентних кривих. Важливо, щоб при повороті кривих на відповідні кути α і φ міжцентрова відстань була сталою. Формулою (3) це вже враховано, оскільки вона отримана при підстановці у (2) виразу $r=2p/(1–e^2)$. При повороті кривих у межах виділених дуг точці контакту відповідають різні значення кутів α і φ, але в положенні, колі точки T_1 і T_2 будуть збігатися, кути α і φ мають бути рівними і мати значення 60^0 для нашого випадку. Неважко переконатися, що в загальному випадку при повороті однієї кривої на кут $\alpha=\pi/n$ друга повинна повернутися на цей же кут, тобто $\varphi=\pi/n$. Перевіримо це за допомогою формули (3). Підставимо в неї $\alpha=\pi/n$ і отримаємо: $\varphi=\pi/n$. Отже, наше припущення доведене.

При $n=1$ ми маємо частковий випадок – центроїди у вигляді конгруентних еліпсів. При $n=2$ маємо випадок центроїд, які є основою для проектування зубчастих коліс для відомих приладів обліку витрат рідини. Візуально ці конгруентні криві подібні до еліпса, однак це не так. На рис. 2 видно, як змінюється форма кривих при зміні сталої e.

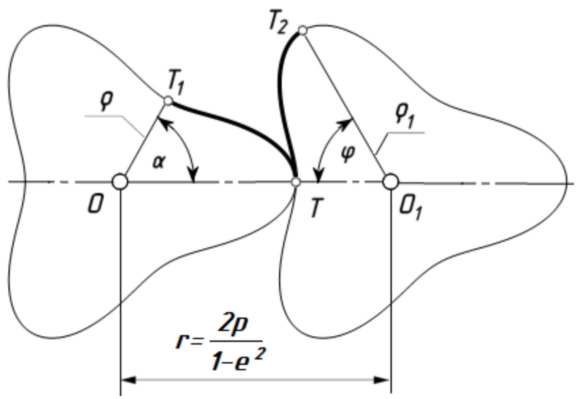


Рис. 1. Графічна ілюстрація для доведення, що конгруентні криві, описані полярним рівнянням (1), утворюють пару криволінійних центроїд

Точка дотику кривих на рис. 2 визначена при різних кутах α і φ згідно формули (18). Оскільки до неї не входить стала p, то різні форми пар центроїд одержано тільки зміною сталої e.

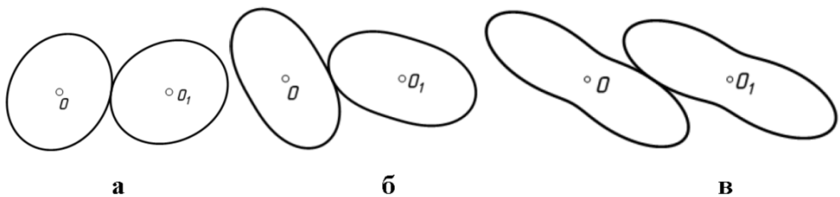
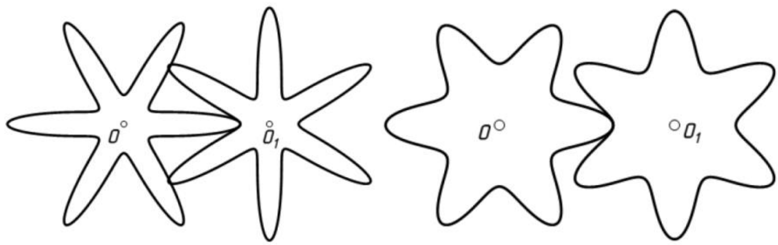


Рис. 2. Конгруентні центроїди, побудовані за полярним рівнянням (13) при $n=2$ і $p=3,2$:

а) $e=0,2$; б) $e=0,3$; в) $e=0,6$

При зростанні числа *n* може виникнути ситуація, коли центроїди не зможуть вільно перекочуватися одна по одній. Це показано на рис. 3,а. Зміною сталої *e* цю проблему можна усунути (рис. 3,б).



а б

Рис. 3. Конгруентні центроїди,

побудовані за полярним рівнянням (1) при *n=6* і *p=3,2*:

а) *e=0,6;* **б) *e=0,3***

Пара циклоїд, зображених на рис. 3,б, може виконувати функцію зубчастого зачеплення, у якого перекочування однієї поверхні по другій здійснюється без ковзання. Така передача не потребує змащення, однак вимагає надзвичайної точності міжцентрової відстані і не може передавати крутний момент великої потужності.

Література:

1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. Москва, 1968. 584 с.
2. T. Hasse. Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. *[Електронний ресурс]* http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf