

SECTION «PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES»

RISK-BASED MODELING OF WATER SUPPLY NETWORKS WITH LEAKS UNDER MILITARY THREATS

РИЗИК-ОРІЄНТОВАНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВОДОПРОВІДНИХ МЕРЕЖ ІЗ ВИТОКАМИ В УМОВАХ ВОЄННИХ ЗАГРОЗ

Dmytro Usenko¹

Iryna Usenko²

DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-673-7-8>

Abstract. In this study, approaches to risk-oriented modeling of water supply networks with leakage under wartime conditions are systematically investigated, a topic that has become particularly relevant in the context of damage to critical infrastructure, instability of water supply regimes, resource scarcity, and the need for rapid engineering decision-making. It is demonstrated that traditional steady-state hydraulic models and simplified leakage representations fail to provide an adequate level of fidelity for analyzing real crisis conditions, as they do not account for temporal variability of demand, the stochastic nature of damage, pressure-dependent leakage flows, degradation of network parameters, and the need for redundancy.

The study substantiates the necessity of transitioning from local deterministic calculations to integrated deterministic–stochastic models, within which the water supply network is considered as a dynamic system characterized by nonlinear interactions among heads, flows, leakage,

¹ Ph.D. of Building and Civil Engineering, MPhys,
Associate Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics and Physics,

² Ph.D. of Building and Civil Engineering,
Associate Professor at the Department of Building and Civil Engineering,
National University "Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic", Ukraine

random perturbations, and structural changes. Particular attention is paid to the integration of classical hydraulic relationships with time-varying leakage parameters, degradation processes, redundancy scenarios, and methods for early anomaly detection.

A key element of the proposed approach is the interpretation of leakage not as a constant additional outflow, but as a pressure-dependent dynamic process whose magnitude evolves with the current hydraulic state of the system. This enables a consistent representation of both the progression of local damage and the nontrivial impact of compensatory operating regimes, particularly redundancy, which may simultaneously enhance system resilience while increasing leakage intensity through defects.

The subject of the research encompasses the processes of modeling, analysis, and scenario-based assessment of water supply network performance with leakage under conditions of uncertainty, degradation, and wartime threats. Within the framework of the study, classical hydraulic and inverse leakage models, stochastic and differential approaches to damage and reliability modeling, data-driven and hybrid anomaly detection methods, graph-based approaches to leakage localization, as well as the software implementation of the proposed model for numerical scenario analysis are considered.

The research methodology is based on an integrated approach that combines classical hydraulics, deterministic–stochastic modeling, scenario analysis, elements of risk-oriented methodology, time-series processing techniques, and residual-based diagnostic schemes. At the first stage, contemporary scientific approaches to modeling leakage, damage, resilience, and anomaly localization are systematized. At the second stage, an original mathematical model is developed, incorporating flow and head balance, pressure-dependent leakage, temporal discretization, stochastic components of demand and measurements, as well as degradation and redundancy scenarios. At the third stage, the model is implemented in Python, and numerical simulations are performed for baseline, emergency, degradation, and redundancy operating regimes.

The aim of the research is to develop a scientifically grounded deterministic–stochastic model of a water supply network with leakage that enables the analysis of system resilience under wartime conditions, accounts for degradation and parameter uncertainty, and provides a foundation

for early anomaly detection and scenario-based support of engineering decision-making. Achieving this objective involves integrating classical hydraulic formulations with a stochastic description of damage, modeling redundancy as a system adaptation mechanism, and numerically validating the proposed approach at the software level. The implementation of such an approach is aimed at enhancing the reliability, resilience, and adaptability of water supply systems under conditions of increased uncertainty, partial destruction, and external threats.

Вступ

Сучасний етап розвитку систем водопостачання характеризується не лише зростанням вимог до ефективності транспортування і розподілу води, а й суттєвим ускладненням умов функціонування самих мереж. Для територій, що перебувають під впливом воєнних загроз, ця проблема набуває особливої гостроти, оскільки водопровідна мережа перетворюється на об'єкт критичної інфраструктури, чия відмова безпосередньо впливає на життєзабезпечення населення, стійкість міського середовища та можливість підтримання базових санітарно-безпекових умов. Воєнні дії, пошкодження трубопроводів, перебої енергоживлення, втрата доступу до джерел води та дефіцит обладнання для оперативного ремонту суттєво змінюють вимоги до гідравлічного моделювання: система має аналізуватися не лише в умовно штатному режимі, а й у широкому спектрі несприятливих сценаріїв [9, с. 32–38].

За таких умов традиційний підхід до водопровідної мережі як до системи з наперед відомими параметрами, ustalеними режимами та локальною інтерпретацією пошкоджень стає недостатнім. Класичні гідравлічні схеми добре описують розподіл напорів і витрат у квазі-стаціонарних умовах, однак у кризових режимах виявляються істотні обмеження: невизначеність попиту, стохастичний характер витоків, деградація параметрів трубопроводів, обмежена кількість сенсорів і необхідність швидкого сценарного перерахунку. Саме тому сучасна наукова література дедалі більше зміщується від локальних детермінованих моделей до інтегрованих підходів, що поєднують класичну гідравліку, стохастичку, часову динаміку, графове представлення мережі й методи аналізу даних [8, с. 3–10; 14, с. 29–38; 15, с. 1–7].

Особливої актуальності набуває проблема витоків, оскільки саме вони є одним із найбільш характерних і водночас найскладніших для виявлення проявів деградації мережі. У найпростішому інженерному трактуванні витік можна розглядати як додатковий відбір води, що змінює баланс витрат у вузлах і перерозподіл напору в гілках мережі. Проте такий підхід виявляється надмірно спрощеним, якщо йдеться про реальні пошкоджені системи, у яких витік залежить від локального тиску, змінюється в часі, маскується випадковими флуктуаціями споживання та супроводжується шумом вимірювань. Саме тиско-залежна природа витоків робить задачу моделювання принципово нелінійною і вимагає відмови від уявлення про дефект як про просту сталу поправку до попиту [8, с. 5–12; 10, с. 14–27].

Важливим кроком у розвитку цієї тематики стало формулювання інверсних задач визначення витоків за вимірними параметрами системи, а також перехід до еквівалентних схем, у яких реальна велика мережа зводиться до компактнішого, але гідравлічно змістовного представлення. Такі підходи дали змогу поєднати розрахункову доступність із прийнятною фізичною інтерпретованістю, проте навіть вони залишилися обмеженими у випадках, коли система переходить у режим підвищеної невизначеності й множинних збурень [14, с. 30–38]. Подальший розвиток теми закономірно привів до появи стохастичних моделей, у яких витоків та режими водоспоживання інтерпретуються як випадкові процеси, а також до data-driven і гібридних підходів, що використовують часові ряди тиску, резидуальні оцінки, графові структури та машинне навчання для раннього виявлення аномалій [2, с. 1–5; 3, с. 1–5; 5, с. 1–5; 13, с. 1–6].

Разом із тим *аналіз сучасних досліджень* показує, що більшість наявних рішень або зосереджуються на окремих аспектах задачі, або орієнтовані на добре інструментовані мережі з достатньою кількістю натурних даних. Класичні гідравлічні моделі забезпечують фізичну основу, але недостатньо враховують часову мінливість і стохастичку. Data-driven підходи демонструють високу чутливість, але залежать від якості даних, повноти сенсорної інфраструктури та придатності навчальних вибірок. Графові й топологічні методи покращують локалізацію, однак самі по собі не замінюють гідравлічний опис. Воєнний контекст додатково загострює ці обмеження, оскільки в таких

умовах необхідні моделі, що одночасно враховують фізику системи, деградацію її параметрів, сценарії резервування, нестабільність зовнішніх умов та можливість раннього виявлення аномальних режимів [3, с. 1–5; 9, с. 32–38; 15, с. 2–6].

Не менш важливим є і поняття стійкості водопровідної мережі. У кризових режимах систему недостатньо оцінювати лише з точки зору відповідності розрахунковим параметрам; значно важливішим стає питання, *чи здатна вона зберігати функціональність* за наявності локальних пошкоджень, часткової втрати пропускної здатності, зниження напору і потреби в перерозподілі потоків. Саме тому резервування, альтернативні джерела подачі та можливість зміни структури гідравлічного режиму мають розглядатися не як допоміжні технічні засоби, а як складові ризик-орієнтованого підходу до моделювання мережі. У такій постановці резервування виступає аналогом структурного підсилення: воно не усуває причину пошкодження, але змінює режим функціонування системи так, щоб зменшити її вразливість [1, с. 100–105; 9, с. 35–38].

У межах цієї наукової роботи *ключова наукова проблема* полягає у формуванні узгодженої моделі водопровідної мережі, яка б поєднувала класичні гідравлічні співвідношення, тиско-залежний опис витоків, часову динаміку стану системи, стохастичні компоненти попиту і вимірювань, деградацію параметрів мережі, сценарії резервування та засоби раннього виявлення аномалій. Інакше кажучи, йдеться про усунення розриву між розрахунковими гідравлічними схемами, стохастичним описом пошкоджень і прикладними інструментами діагностики, що особливо важливо для систем водопостачання в умовах воєнних загроз. Саме ця прогалина, виразно помітна в сучасній літературі, і визначає напрям даного дослідження.

Метою цієї роботи є обґрунтування теоретичних засад і розроблення прикладної детерміновано-стохастичної моделі водопровідної мережі з витокami, яка дозволяє аналізувати стійкість системи в умовах воєнних загроз, ураховувати деградацію та невизначеність параметрів, моделювати резервування та забезпечувати основу для раннього виявлення аномальних режимів. Досягнення поставленої мети передбачає вирішення комплексу взаємопов'язаних завдань: аналізу сучасних наукових підходів, виділення класичних гідравлічних поло-

жень, потрібних для побудови власної моделі, формалізації детерміновано-стохастичної динаміки системи, моделювання деградації та стійкості, а також програмної реалізації запропонованого підходу з подальшим чисельним сценарним аналізом.

1. Аналіз сучасних наукових підходів до математичного моделювання, виявлення витоків та забезпечення стійкості систем водопостачання в умовах воєнних загроз

Аналіз сучасних наукових публікацій показує, що проблема функціонування систем водопостачання в умовах пошкоджень, прихованих витоків, дефіциту даних і нестабільних режимів роботи поступово зміщується від локальних гідравлічних розрахунків до формування інтегрованих, ризик-орієнтованих та інтелектуалізованих підходів. Якщо традиційні моделі розглядали мережу переважно як систему трубопроводів із заданими параметрами та усталеними режимами, то сучасні дослідження дедалі більше враховують невизначеність попиту, стохастичний характер витоків, роль сенсорної інфраструктури, часову мінливість тиску та необхідність оперативного реагування в умовах аварій або кризових впливів [8, с. 3–8; 14, с. 29–33; 9, с. 32–35].

Найбільш ранній і методологічно базовий пласт досліджень пов'язаний із класичними гідравлічними та математичними моделями витоків. У цих роботах витік розглядається як неконтрольований відбір води, який змінює напірно-витратний режим мережі та має бути врахований у системі рівнянь балансу. Важливим кроком у розвитку цього напряму стало формулювання інверсних задач визначення витоків на основі виміряних тисків і витрат у вузлах та на входах мережі. Саме такий підхід реалізовано у праці T. Korpel, L. Ainola та R. Ruust, де витік інтерпретується не лише як локальний дефект, а як складова загальної задачі декомпозиції неконтрольованих витрат на незареєстроване споживання і власне втрати. У результаті гідравлічна модель перетворюється з інструмента прямого розрахунку на засіб ідентифікації прихованих параметрів системи [8, с. 3–10]. Поруч із цим у класичних моделях сформувалося уявлення про тиско-залежний характер витоків, згідно з яким зростання напору веде до збільшення витрат через дефект. Це положення стало основою для подальших ступеневих і модифікованих оріфісних залежностей, а також

для концепції керування тиском як інструмента зменшення втрат [8, с. 5–12; 10, с. 14–27].

Подальший розвиток класичних підходів пов'язаний із урахуванням того, що реальні мережі мають велику розмірність, неповноту інформації про геометрію та стан трубопроводів, а також обмежену кількість точок спостереження. Це зумовило появу еквівалентних схем і стохастичних моделей, у яких мережа редукується до більш компактного представлення, але зберігає свої ключові гідравлічні властивості. У роботі А. Tevyashev, О. Matviyenko та G. Nikitenko підкреслено, що детерміновані моделі описують мережу лише в окремий момент часу і є недостатньо стійкими до випадкових змін у споживанні та параметрах обладнання. Саме тому автори пропонують стохастичну модель квазістаціонарних режимів із прихованими витоками, яка враховує випадковий характер водоспоживання та дозволяє будувати метод виявлення і розрахунку витоків без потреби у надмірному додатковому оснащенні мережі вимірювальною апаратурою [14, с. 30–38]. Такий підхід є принципово важливим для подальшого переходу до задач, де витік уже не розглядається як поодинокі подія, а як одна з форм стохастичної деградації системи.

Окремий, більш сучасний напрям сформувався на перетині математичного моделювання надійності та задач водної стійкості в кризових і оборонних умовах. У дослідженні F. K. Al Husein та співавторів система водопостачання розглядається у зв'язку з концепцією water resilience, а для опису її динаміки запропоновано використовувати звичайні диференціальні рівняння. Акцент зроблено не на локальному витокі як такому, а на динаміці пошкодження, споживання, технічного обслуговування, кризових сценаріїв і загальної відмовостійкості мережі. Хоча ця модель має концептуальний характер і сама по собі ще не дає повного прикладного інструментарію для локалізації прихованих витоків, вона є важливою тим, що вводить часову змінність, ризик-менеджмент і поняття стійкості системи як цілісного об'єкта [1, с. 97–103]. Саме цей пласт робіт створює передумови для переходу від статичних розрахунків до динамічних моделей деградації та резервування.

Помітне місце у сучасній літературі займають підходи, орієнтовані на керування тиском і поєднання фізичних моделей з оптимізаційними

алгоритмами. У праці J.-R. Bermúdez та співавторів запропоновано гібридний підхід, який поєднує model-based та data-driven компоненти: генетичний алгоритм використовується для виявлення та локалізації витоків, а регулятор LQR – для активного керування тиском з метою зменшення втрат [4, с. 1–6]. Важливо, що в цій роботі витік уже не розглядається виключно як об’єкт пасивної діагностики; навпаки, він стає елементом контуру керування, де інформація про зміну режиму системи використовується для формування коригувальної дії. Цей підхід методологічно близький до майбутніх інтелектуальних систем, але залишається глибоко вкоріненим у класичній гідравлічній логіці, оскільки спирається на динамічну модель мережі та виміряні тиски й витрати [4, с. 1–2].

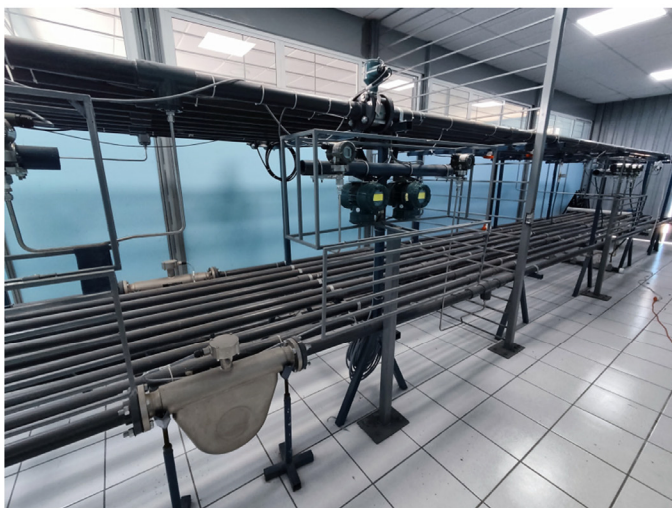


Рис. 1.1. Гідравлічна пілотна установка, використана для експериментальної перевірки гібридного підходу до виявлення витоків і керування тиском у водопровідній мережі [4, с. 2]

Експериментальна гідравлічна установка, наведена на рисунку 1.1, ілюструє фізичну базу для перевірки гібридних підходів до виявлення витоків та керування тиском у мережі. Її використання підтверджує,

що сучасні model-based/data-driven рішення розвиваються не лише на рівні чисельних симуляцій, а й спираються на лабораторні стенди, де відтворюються контрольовані режими течії, зміни тиску та аварійні сценарії витоків [4, с. 2–3].

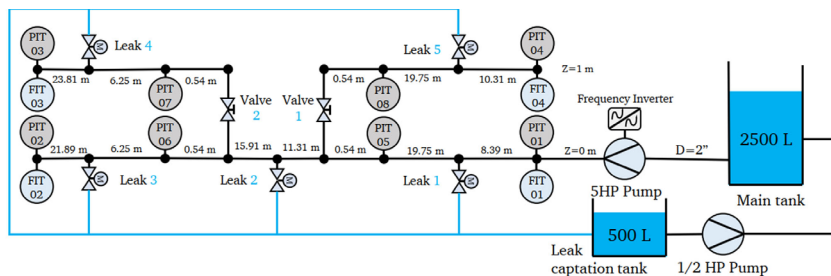


Рис. 1.2. P&ID-схема пілотної гідравлічної установки з вузлами вимірювання, регулювання та контрольованими витокami [4, с. 3–4]

Схема, наведена на рисунку 1.2, відображає структурну організацію пілотної водопровідної мережі, включаючи розташування датчиків тиску (PIT), витратомірів (FIT), регулюючих клапанів і контрольованих точок витоків. Така конфігурація дозволяє формалізувати систему у вигляді графа з вимірюваними параметрами стану, що є необхідною передумовою для побудови гібридних моделей, які поєднують гідравлічні рівняння з алгоритмами обробки даних [4, с. 3–4].

Значний масив сучасних досліджень пов'язаний із data-driven, logic-based та machine-learning підходами до раннього виявлення витоків і проривів. Їх поява обумовлена тим, що в реальних мережах сенсорні дані надходять безперервно, а кількість можливих режимів і відхилень настільки велика, що детермінований аналіз у чистому вигляді стає недостатнім. У роботах К. Joseph та співавторів показано ефективність як логічних правил, так і алгоритмів машинного навчання для класифікації станів мережі на підставі SCADA-даних, тисків і витрат. При цьому logic-based методи краще виявляють прості аномалії, тоді як ML-моделі виявляються більш гнучкими щодо складних, змінних або слабо виражених шаблонів відхилення [6, с. 2–6]. Подальше

дослідження тих самих авторів, побудоване вже на ширшому порівнянні чотирнадцяти алгоритмів, підтвердило високу ефективність Random Forest, K-Nearest Neighbours і Decision Tree для класифікації сценаріїв leak/major leak/no leak [7, с. 1–5]. У сукупності ці роботи демонструють, що сучасна парадигма раннього виявлення дедалі більше зміщується в бік автоматизованої інтерпретації великих масивів даних.

Дуже показовим є й узагальнюючий огляд M. Zuñiga-Uribe та співавторів, у якому систематизовано 53 дослідження за 2018–2025 роки. Автори показують, що тиск залишається найбільш інформативною змінною для виявлення гідравлічних аномалій, а основна маса наборів даних досі формується на базі EPANET-моделювання. Машинне навчання, зокрема SVM, демонструє високу точність при порівняно невисоких обчислювальних витратах, тоді як глибокі нейронні моделі, особливо CNN, виявляються ефективними для багатокласової класифікації та локалізації. Найкращі результати показують гібридні моделі, що поєднують автоматичне виділення ознак із класичними класифікаторами [15, с. 1–7]. Разом з тим саме цей огляд підкреслює і головну слабкість сучасного data-driven напрямку: дефіцит натурних даних, надмірну залежність від симуляційних вибірок та обмежену узагальнюваність моделей поза межами конкретного сценарію або каліброваної мережі [15, с. 2–6].

Паралельно з ML-підходами активно розвиваються методи часових рядів, засновані на аналізі кореляцій між сигналами тиску від кількох датчиків. У роботі Y. Shao та співавторів запропоновано time-series-based підхід, де замість одноразового порівняння напорів використовується часово-змінна кореляція між сигналами від множини датчиків тиску. Порогові значення визначаються на основі фальсифікації сценаріїв витoku, а сканування виконується у часовому вікні, довжина якого впливає на чутливість і стійкість методу [13, с. 1–6]. Такий підхід важливий тим, що виявлення витoku ґрунтується не на абсолютному відхиленні одного сигналу, а на зміні взаємозв'язків між кількома контрольними точками мережі. Це безпосередньо наближає задачу до динамічних моделей стану системи та створює підґрунтя для подальшої інтеграції з імовірнісними і байєсівськими схемами обробки даних.

Важливу роль у сучасних дослідженнях відіграють також підходи до локалізації витoku на основі топології мережі, тискових резидуалів та графових представлень. У праці D. Alves та співавторів запропоновано *robust data-driven* метод, у якому поєднуються оцінки тиску в безвитоківому режимі, резидуали за вимірними даними та топологічна інформація про найімовірніший шлях руху води від резервуарів до датчиків і потенційних вузлів витoku. Результатом є *likelihood*-індекс, який може використовуватись як у поточний момент часу, так і на часовому горизонті з використанням правила Байєса [2, с. 1–5]. Близьку за логікою, але більш розвинену в графовому сенсі концепцію подано у роботі D. Vargas та співавторів, де використано багатопланову мережу, що поєднують інфраструктурний граф, дані від сенсорів і часові залежності. У такій постановці виявлення аномалії спирається на графові кореляції, а локалізація – на зіставлення реальних і симульованих даних за допомогою *Dynamic Time Warping* [3, с. 1–5]. Ці дослідження показують, що топологія мережі перестає бути лише геометричним фоном для гідравлічного розрахунку і стає самостійним джерелом інформації для діагностики витоків.

Не менш важливим є питання оптимального розміщення датчиків тиску, оскільки навіть найкращий алгоритм локалізації не забезпечить надійного результату за погано організованої сенсорної схеми. У роботі I. Santos-Ruiz та співавторів запропоновано підхід на основі теорії інформації, в якому кандидатні вузли оцінюються з точки зору максимальної корисності інформації для виявлення витoku при одночасній мінімізації надлишковості між датчиками. На практиці це означає, що розміщення датчиків розглядається не як суто технічна задача, а як оптимізація інформаційної спостережуваності мережі [12, с. 1–4]. Для розроблення моделей раннього виявлення в умовах воєнного часу цей аспект має особливе значення, оскільки кількість доступних датчиків, енергія живлення і канали передавання даних можуть бути обмеженими.

Ще один перспективний напрям пов'язаний із використанням ансамблевих регресійних і байєсівських схем для раннього виявлення витоків на рівні DMA. У дослідженні S. Chatterjee та співавторів запропоновано *regression-ensemble framework*, що навчає DMA-специфічну залежність між попитом і подачею та виявляє витік за відхиленням

між прогнозованою та реальною подачею. Важливо, що ця система не потребує розмічених витоків даних для навчання, а поєднує кілька регресійних моделей та кілька метрик аномальності в єдиний ансамблевий індекс [5, с. 1–5]. У роботі J.-L. Molina та співавторів реалізовано іншу логіку – StocHastIc Early Leakage Detection System (SHIELDS), яка базується на байєсівських мережах і враховує просторово-часову динаміку змін тиску, витрати, швидкості й втрат напору [11, с. 1–4]. Обидва підходи репрезентують перехід від простого порогового контролю до ймовірного виявлення ранніх, ще слабко виражених витоків.

У контексті саме воєнного часу окрему значущість мають праці, в яких гідравлічне моделювання розглядається не лише як задача розрахунку режимів, а як інструмент управління ризиками, сценарного аналізу та підтримки рішень при частковому руйнуванні інфраструктури. Українське дослідження О. Кравченка та співавторів прямо вказує, що бойові дії продемонстрували необхідність нових вимог до моделювання: мережа повинна аналізуватися не лише у нормальному режимі, а й за сценаріями знеструмлення, втрати вододжерела, погіршення якості води, руйнування окремих ділянок і необхідності реагування на ХБРЯ-загрози [9, с. 32–38]. Отже, у кризових умовах модель має бути не просто точною, а ще й сценарно гнучкою, адаптивною до неповних даних та придатною для оперативного використання. Саме ця постановка зближує воєнне гідравлічне моделювання з задачами резервування, стійкості, раннього виявлення аномалій і динамічного управління режимами системи.

Таким чином, виконаний огляд дозволяє виділити кілька послідовно пов'язаних етапів еволюції наукових підходів. На першому етапі домінували класичні гідравлічні та інверсні моделі, що описували витoki через баланс напорів і витрат. На другому етапі відбулося включення стохастичності, еквівалентних схем і часової динаміки відмов. На третьому етапі акцент змістився до сенсорних мереж, аналізу часових рядів, графових методів і машинного навчання. Нарешті, сучасний стан проблеми характеризується формуванням гібридних підходів, що поєднують physics-based і data-driven компоненти, а також орієнтацією на раннє виявлення, локалізацію, резервування і сценарну стійкість системи [4, с. 1–6; 5, с. 1–5; 15, с. 1–7].

Графова інтерпретація водопровідної мережі, наведена на рисунку 1.3, відображає її представлення у вигляді орієнтованого графа, де вузли відповідають точкам споживання або з'єднання, а ребра – ділянкам трубопроводів із заданим напрямком потоку. Такий підхід дозволяє формалізувати топологічну структуру системи та є основою для подальшого застосування як гідравлічних, так і data-driven методів аналізу, включаючи локалізацію витоків і оцінку стійкості мережі [14, с. 33].

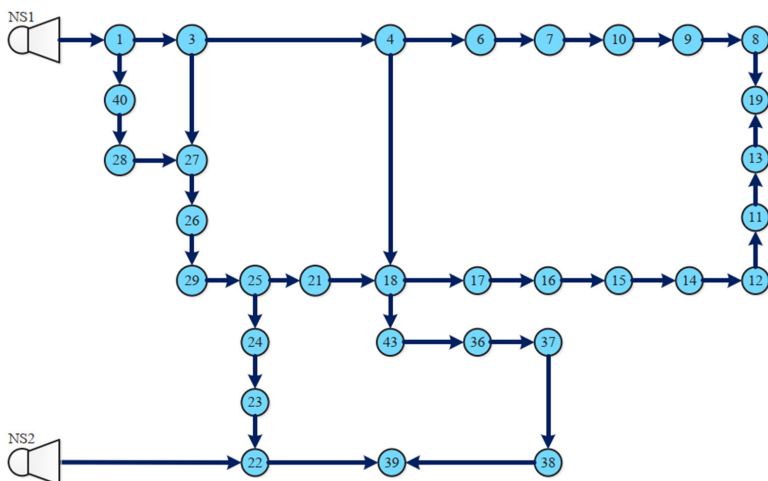


Рис. 1.3. Графова модель водопровідної мережі, що використовується для аналізу топології та потокорозподілу [14, с. 32]

Разом з тим аналіз джерел показує, що єдина інтегрована модель, яка б одночасно враховувала гідравліку мережі, стохастичну природу витоків, часову динаміку пошкоджень, потребу в резервуванні та специфіку воєнних режимів функціонування, у сучасній літературі ще не сформована в достатньо завершеному вигляді. Саме ця наукова прогалина і визначає доцільність переходу до побудови власної математичної моделі у наступному розділі.

2. Основна частина

2.1. Класичні гідравлічні та математичні моделі витоків у системах водопостачання

На відміну від оглядового розділу 2, у цьому підрозділі акцент зроблено не на систематизації сучасних підходів, а на виокремленні тих класичних гідравлічних і математичних положень, що становлять безпосередню теоретичну основу для подальшої побудови власної детерміновано-стохастичної моделі водопровідної мережі. Класичні підходи до моделювання витоків у системах водопостачання сформулювали теоретичну основу для подальшого розвитку як гідравлічного аналізу, так і алгоритмів діагностики аварійних станів. Їх спільною рисою є розгляд витoku як додаткового, несанкціонованого відбору води з мережі, який змінює розподіл напорів, витрат і режимів роботи системи загалом. У найпростішому випадку витік вводиться в модель як локальний вузловий відбір, тоді як у більш складних постановках він трактується як розподілений по довжині трубопроводу неконтрольований витратний компонент. Саме така еволюція від локальних до розподілених моделей відображає перехід від спрощених інженерних схем до більш реалістичного опису функціонування водопровідних мереж [8, с. 3–6; 14, с. 29–32].

У межах класичної гідравлічної парадигми мережа водопостачання подається у вигляді графа, вершини якого відповідають вузлам споживання, джерелам або контрольним точкам, а ребра – трубопроводам, насосним станціям і регульовальним елементам. Для такого графа записується система рівнянь балансу витрат у вузлах і рівнянь витрат напору на ділянках. Якщо в моделі не враховано витoki, то вся невідповідність між фактичними і розрахунковими даними тиску та витрати інтерпретується як похибка калібрування, помилка вимірювання або неточність у заданні попиту. Саме тому одним із ключових висновків ранніх досліджень стало положення про те, що неконтрольовані витрати не можуть розглядатися лише як другорядне збурення; вони повинні бути інтегровані в саму структуру математичної моделі мережі [8, с. 3–5].

Важливим етапом у розвитку цього напрямку стало формулювання інверсних задач визначення витоків. Їх суть полягає у тому, що за виміряними значеннями напору і витрати на входах, виходах або в окремих

вузлах мережі необхідно відновити невідомі параметри – величину витіку, його просторовий розподіл або частку неконтрольованого відбору в загальному балансі системи. Саме такий підхід докладно розвинено у роботі Т. Koppel, L. Ainola та R. Puust, де витік розглядається як складова оберненої задачі декомпозиції неконтрольованої витрати на незареєстроване споживання та власне втрати в мережі. Методологічно це означало перехід від прямого гідравлічного розрахунку до задачі ідентифікації прихованих параметрів на основі обмеженого набору спостережуваних змінних [8, с. 3–8]. У цьому підході особливо важливо те, що витік уже не вважається лише локальним дефектом трубопроводу, а входить до загальної задачі калібрування і уточнення стану системи.

Класичні математичні моделі витоків умовно можна поділити на дві групи. До першої належать моделі, у яких витік задається як вузлова додаткова витрата. У такому разі гідравлічна схема мережі не змінюється структурно, а всі наслідки аварії проявляються через зміну вузлових балансів та перерозподіл напору. Перевагою цього підходу є його обчислювальна простота, сумісність із більшістю стандартних програм гідравлічного моделювання та зручність для сценарного аналізу. Водночас така схема має принципове обмеження: реальний витік рідко поводить себе як ідеалізований точковий відбір, особливо у випадку довготривалих пошкоджень, мікротріщин або розгерметизації ділянок зі змінним тиском [8, с. 5–10].

До другої групи належать моделі, в яких витік розглядається як тиско-залежна величина. Саме вони виявилися значно ближчими до фізики процесу. Якщо в мережі зростає напір, витрата через дефект також зростає, а отже витік не є сталою величиною, а змінюється разом із режимом системи. Ця обставина принципово важлива для інженерного аналізу, оскільки спроба компенсувати дефіцит напору простим підвищенням тиску може не зменшити проблему, а навпаки – посилити втрати. На цій основі сформувався класична залежність, згідно з якою витік описується як функція напору у степеневій формі. У найзагальнішому вигляді вона записується як $q_{\text{leak}} = Ch^{N_1}$, де q_{leak} – витрата через дефект, h – локальний напір, C – коефіцієнт витіку, а N_1 – показник, що характеризує чутливість витіку до зміни тиску [10, с. 14–21; 10, с. 24–27].

Значення показника N_1 стало одним із центральних параметрів у класичній теорії витоків, оскільки саме він визначає, наскільки інтенсивно система реагує на зміну тиску. У спрощеному випадку малих отворів і жорстких меж дефекту поведінка витoku наближається до витікання через отвір, для якого витрата пропорційна квадратному кореню з напору. Однак польові та лабораторні дослідження показали, що для реальних мереж значення N_1 може суттєво відхилитися від цього ідеалізованого випадку через деформівність стінок труби, зміну форми тріщини, особливості матеріалу та режиму навантаження. Відповідно, класична степенева модель стала зручною не лише для опису витoku, а й для кількісної оцінки ефекту керування тиском, зонування мереж і прогнозування втрат при зміні режимів експлуатації [10, с. 20–25].

Подальший розвиток цих уявлень пов'язаний із переходом від феноменологічного опису до моделей, що намагаються пов'язати параметри витoku з фізичними характеристиками дефекту. У такому контексті важливе значення набули модифіковані оріфісні залежності та концепція FAVAD, у межах якої площа витoku вважається не сталою, а змінною під дією тиску. Це дозволяє краще описувати поведінку тріщин, розкриття стиків і деформаційно-чутливих пошкоджень. Разом з тим навіть ці моделі залишаються в межах класичної гідравлічної логіки: вони пояснюють реакцію витoku на тиск, але не розв'язують повною мірою задачі його раннього виявлення за обмежених вимірювань і не враховують стохастичну мінливість споживання та пошкоджень у часі [10, с. 24–27; 14, с. 30–33].

Окремий напрям у межах класичних моделей становлять еквівалентні схеми мереж. Їх поява була зумовлена практичною проблемою: реальні водопровідні мережі мають велику розмірність, неповні дані про фактичний стан обладнання та обмежену кількість контрольних точок. За таких умов пряме моделювання повної мережі або нестійке, або надто залежне від невизначених параметрів. Саме тому було запропоновано переходити від реальної схеми до еквівалентної, у якій зберігаються ключові гідравлічні властивості, але кількість ступенів свободи істотно зменшується. У роботі А. Tevyashev, О. Matviyenko та G. Nikitenko така ідея доведена до послідовної математичної постановки: спочатку будується еквівалентна водопровідна мережа, після

чого в неї вводяться витoki та формулюється ітераційна процедура їх оцінювання за змінами напору в диктуючих точках [14, с. 29–34].

Перевага еквівалентних схем полягає у тому, що вони дозволяють поєднати гідравлічну коректність із доступністю практичних розрахунків. Якщо реальна мережа має недостатню інструментальну забезпеченість, то еквівалентна модель дає змогу працювати з обмеженим набором вузлів спостереження та все ж відтворювати загальну картину перерозподілу напорів. Водночас така редукція неминуче супроводжується втратою просторової деталізації. Тому класичні еквівалентні моделі добре придатні для оцінки сумарних витоків або для локалізації проблемних зон на рівні району, але значно менш ефективні для точного визначення місця пошкодження на окремі ділянки трубопроводу [14, с. 31–38].

У цьому ж контексті важливо підкреслити значення методів калібрування. Класична гідравлічна модель без попереднього узгодження з фактичними вимірюваннями має обмежену практичну цінність. У довоєнних умовах калібрування здебільшого використовували для уточнення розрахункових діаметрів, шорсткостей, зон споживання і режимів насосних станцій. Однак у сучасних умовах, особливо для пошкоджених або частково деградованих мереж, калібрування набуває іншого змісту: воно стає передумовою сценарного аналізу аварій, пошуку слабких місць і моделювання несприятливих режимів. Саме на це вказують українські дослідження, присвячені вимогам до гідравлічного моделювання мереж водопостачання у воєнний час. У них підкреслюється, що для систем, які не мають достатньо деталізованої моделі, першим етапом має бути оцифрування картографічної інформації, натурне уточнення мереж, визначення навантажень і калібрування по контрольних точках [9, с. 32–36]. Це положення є принципово важливим і для розгляду класичних моделей витоків: без коректної базової моделі будь-яка задача ідентифікації витoku втрачає надійність.

Разом з тим класичні гідравлічні моделі мають низку обмежень, які дедалі виразніше проявляються в умовах воєнного часу, часткових руйнувань мережі, несталого попиту та дефіциту даних. По-перше, у більшості традиційних постановок параметри мережі вважаються сталими або квазісталими на інтервалі розрахунку. По-друге, випадкові коливання споживання, нелегальні відбори, локальні мікропо-

шкодження і сенсорні похибки або ігноруються, або враховуються лише як допоміжні збурення. По-третє, сам витік часто трактується як одинична подія, тоді як на практиці система може містити множинні приховані витіки, що одночасно впливають на поле тиску. У підсумку класичний детермінований підхід добре працює для усталених або слабо збурених режимів, але втрачає достатню пояснювальну силу тоді, коли мережа переходить у режим підвищеної невизначеності [8, с. 8–16; 14, с. 30–38].

Це не зменшує значення класичних моделей; навпаки, саме вони формують базову математичну основу для подальшого розвитку стохастичних, data-driven та гібридних підходів. Усі сучасні методи – від аналізу часових рядів тиску до машинного навчання – так чи інакше спираються на фундаментальні гідравлічні уявлення про баланс витрат, тиско-залежний характер витіку і структурну подачу мережі у вигляді графа. Тому класичні моделі слід розглядати не як завершений інструментарій, а як вихідний рівень формалізації, без якого неможливе побудування адекватних моделей вищого рівня складності. Для задач воєнного часу їхня роль особливо важлива ще й тому, що вони забезпечують інженерно зрозумілу і фізично інтерпретовану основу, на яку надалі можуть накладатися стохастичні параметри, сценарії деградації, алгоритми резервування та методи раннього виявлення аномалій [9, с. 32–38; 14, с. 29–38].

Таким чином, класичні гідравлічні та математичні моделі витіків сформували три ключові методологічні положення, які залишаються актуальними і сьогодні. По-перше, витік повинен бути інтегрований у математичну модель мережі як повноцінний елемент її гідравлічного режиму, а не як зовнішня поправка. По-друге, залежність витіку від тиску має принциповий характер і не може бути замінена сталою витратною поправкою без втрати фізичного змісту. По-третє, задача виявлення витіку є, по суті, інверсною задачею ідентифікації прихованих параметрів за обмеженим набором спостережуваних змінних. Саме з цих положень і випливає логіка подальшого розвитку теми – переходу до стохастичних, диференціальних та інтелектуальних моделей, які здатні враховувати часову мінливість, неповноту даних і складні аварійні сценарії.

2.2. Детерміновано-стохастична модель динаміки системи водопостачання

У попередньому підрозділі було сформульовано загальну постановку задачі та концепцію моделі системи водопостачання як графової структури з урахуванням витоків, пошкоджень і резервування. Подальший розвиток цієї постановки потребує побудови математичного апарату, який дозволяє описати динамічну поведінку системи в умовах змінного навантаження, невизначеності параметрів та випадкових збурень. У цьому підрозділі формується детерміновано-стохастична модель, що поєднує класичні гідравлічні співвідношення з випадковими процесами, які відображають реальні умови функціонування мережі.

Базова гідравлічна модель. В основі моделювання лежать класичні рівняння гідравліки водопровідних мереж, які описують розподіл витрат і напорів у вузлах і трубопроводах. У межах прийнятої графової моделі кожен вузол системи задовольняє рівнянню балансу витрат, відповідно до якого сума притоків і відтоків у вузлі дорівнює нулю з урахуванням споживання та втрат:

$$\sum Q_{in} - \sum Q_{out} = d_i + q_{leak,i},$$
 де d_i – водоспоживання у вузлі, $q_{leak,i}$ – витік.

Рівняння балансу напорів визначають втрати енергії вздовж трубопроводів і пов'язують напори у вузлах із витратами через нелінійні залежності, що враховують гідравлічний опір труб. У класичних моделях ці рівняння формують систему алгебраїчних співвідношень, яка розв'язується для усталеного режиму. Однак, як показано в роботах [8, с. 3–6; 9, с. 32–35], така постановка є обмеженою, оскільки не враховує часову мінливість режимів та випадковий характер збурень.

На рисунку 2.1 наведено приклад топологічної моделі водопровідної мережі з явним урахуванням просторового розташування вузлів і трубопроводів. Така форма представлення поєднує графову структуру з геометричними координатами, що дозволяє коректно враховувати довжини гілок, гідравлічні втрати та просторову неоднорідність параметрів. Подібні моделі широко використовуються як база для побудови як детермінованих гідравлічних рівнянь, так і data-driven алгоритмів локалізації витоків [2, с. 8].

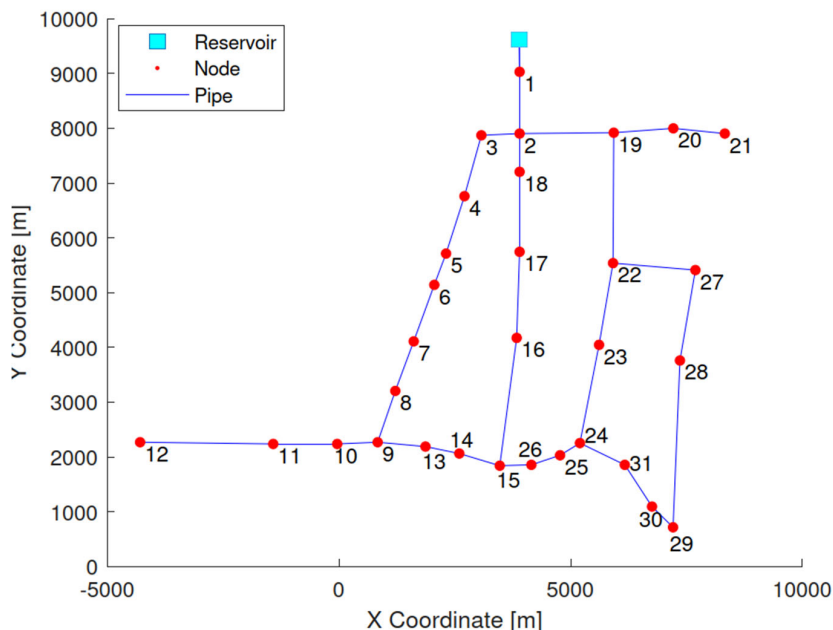


Рис. 2.1. Спрощена топологічна модель водопровідної мережі (Nanoi WDN)

з просторовим розташуванням вузлів і трубопроводів [2, с. 8]

Таким чином, базова гідравлічна модель виступає лише як детермінована складова, яка описує миттєвий стан системи при заданих параметрах.

Динамічне рівняння системи. Для переходу від стаціонарного опису до динамічного вводиться дискретизована +у часі модель зміни напору в кожному вузлі мережі. У загальному вигляді вона записується як:

$h_i^{t+1} = h_i^t + \Delta t \times f(Q, h, d)$, де h_i^t – напір у вузлі i у момент часу t , Q – вектор витрат, d – вектор споживання, Δt – часовий крок.

Функція $f(\cdot)$ відображає гідравлічну динаміку системи і включає:

- перерозподіл потоків між вузлами;
- втрати напору в трубопроводах;
- вплив змін попиту.

На відміну від класичних підходів, де розглядається лише усталений стан, дана модель дозволяє описати перехідні процеси, зокрема реакцію системи на раптові витoki або зміну режимів роботи. Подібний перехід до динамічного опису відповідає сучасним підходам, де система розглядається як така, що еволюціонує в часі під дією зовнішніх і внутрішніх факторів [1, с. 97–101].

Модель витоків у динамічній постановці. На відміну від попереднього підрозділу, де витік розглядався як статичний параметр, у динамічній моделі він вводиться як змінна величина, що залежить від поточного стану системи. Базове співвідношення має вигляд:

$q_{\text{leak}} = k \times h^n$, де k – коефіцієнт витoku, n – показник чутливості до тиску.

Ця залежність відображає фізичну природу процесу витікання та узгоджується з класичними дослідженнями [8, с. 5–10; 10, с. 14–21]. Важливо підкреслити, що в умовах динамічного моделювання параметри k та n можуть змінюватися у часі, що дозволяє враховувати:

- розвиток пошкодження;
- зміну геометрії дефекту;
- вплив навантажень на трубопровід.

Таким чином, витік стає не просто додатковим відбором, а динамічним елементом системи, який взаємодіє з полем напорів.

Введення стохастичних компонентів. Реальні системи водопостачання функціонують в умовах значної невизначеності, яка не може бути адекватно описана виключно детермінованими моделями. Тому до моделі вводяться стохастичні складові, які відображають випадкові фактори.

По-перше, витoki розглядаються як випадкові процеси $\hat{i}(t)$, що можуть виникати в різних вузлах мережі з різною інтенсивністю. Такий підхід узгоджується зі стохастичними моделями водопровідних систем, де витoki інтерпретуються як випадкові події, пов'язані з деградацією інфраструктури [14, с. 30–34].

По-друге, враховується шум вимірювань, який впливає на дані тиску та витрат. У сучасних системах моніторингу це є суттєвим фактором, що ускладнює задачу виявлення витоків і потребує використання методів фільтрації та статистичного аналізу [2, с. 2–4].

По-третє, у модель вводяться флуктуації попиту $d_i(t)$, які можуть мати як випадковий, так і квазіперіодичний характер. Дослідження показують, що зміни споживання можуть маскувати або імітувати витоки, що створює додаткові труднощі для їх ідентифікації [13, с. 1–4].

У результаті загальне рівняння набуває вигляду:

$h_i^{t+1} = h_i^t + \Delta t \times f(Q, h, d) + \xi_i(t)$, де $\xi_i(t)$ – сукупний стохастичний вплив.

Інтерпретація моделі. Отримана модель дозволяє інтерпретувати систему водопостачання як складну динамічну систему з такими властивостями:

- нелінійність – обумовлена залежністю витоків і втрат напору від тиску;
- нестационарність – параметри системи та режими змінюються у часі;
- стохастичність – на систему впливають випадкові фактори (витоки, попит, шум).

Саме така інтерпретація відповідає сучасним уявленням про водопровідні мережі як про системи з високим рівнем невизначеності та складною внутрішньою структурою [15, с. 2–6; 11, с. 1–4].

Запропонована детерміновано-стохастична модель має принципове значення для подальших підрозділів. Вона, з одного боку, не дублює класичний опис, наведений раніше, а з іншого – створює узагальнену основу, на якій можуть бути побудовані:

- моделі деградації та пошкоджень;
- підходи до резервування;
- алгоритми виявлення витоків;
- програмна реалізація системи.

Таким чином, дана модель виступає як ядро всієї подальшої побудови, забезпечуючи узгодження фізичного змісту, математичної строгості та можливості практичного застосування.

2.3. Моделювання пошкоджень, стійкості та методи виявлення витоків у детерміновано-стохастичних системах водопостачання

Запропонована у попередньому підрозділі детерміновано-стохастична модель описує динаміку системи водопостачання з урахуванням витоків і випадкових збурень. Однак для адекватного відтворення

реальних умов функціонування цього недостатньо. Необхідно врахувати, що витoki є лише одним із проявів більш загального процесу деградації інфраструктури, який включає накопичення пошкоджень, невизначеність параметрів і зміну структури мережі. У цьому підрозділі здійснюється узагальнення моделі шляхом включення процесів деградації, формалізації стійкості системи та інтеграції методів виявлення витоків у єдину концепцію.

Моделювання пошкоджень і деградації системи

У реальних умовах водопровідна мережа функціонує як система, що постійно зазнає деградації під впливом експлуатаційних навантажень, корозії, гідравлічних ударів і зовнішніх факторів, зокрема у воєнний час. Це призводить до формування різних типів пошкоджень, які можуть проявлятися у вигляді локальних витоків, прихованих дефектів або повних розривів трубопроводів.

Локальні витoki зазвичай пов'язані з мікропошкодженнями і характеризуються відносно малими витратами, які, однак, можуть накопичуватися і призводити до значних втрат води. Приховані витoki мають особливе значення, оскільки тривалий час залишаються невиявленими і змінюють гідравлічний режим системи без явних ознак аварії. Розриви трубопроводів, навпаки, мають різко виражений характер і супроводжуються значними змінами тиску та витрат.

У межах математичної моделі ці процеси описуються через змінні параметри витoku $k(t)$ та $n(t)$, які відображають еволюцію дефекту в часі. Такий підхід узгоджується зі стохастичними моделями водопровідних мереж, де витік розглядається як випадковий процес, пов'язаний із деградацією системи [14, с. 30–34]. Введення часової залежності параметрів дозволяє врахувати накопичення пошкоджень і поступовий перехід від малих витоків до аварійних станів.

Ймовірнісна постановка задачі передбачає розгляд відмов як випадкових подій із певною інтенсивністю. У цьому контексті система може перебувати у різних станах – від нормального функціонування до часткової або повної втрати працездатності. Подібний підхід використовується у моделях ризик-менеджменту водопостачання, де стан системи описується диференціальними рівняннями з урахуванням відмов і відновлення [1, с. 97–102]. Таким чином, витік стає частиною ширшого процесу деградації, що визначає надійність і життєвий цикл мережі.

Крім того, істотну роль відіграє невизначеність параметрів. До неї належать:

- випадкові коливання споживання води;
- зміна гідравлічних характеристик труб (шорсткість, діаметр);
- неточності геометричної моделі мережі.

Ці фактори впливають на результати розрахунків і можуть маскувати наявність витоків. Як показано в сучасних дослідженнях, навіть незначні похибки в параметрах можуть призводити до суттєвих відхилень у розподілі тиску [9, с. 32–36; 15, с. 2–5]. У зв'язку з цим модель повинна розглядатися як система з невизначеними параметрами, що потребує статистичного або ймовірнісного опису.

Таким чином, у рамках даного підходу здійснюється перехід від ідеалізованої гідравлічної моделі до моделі реальної нестабільної системи, в якій пошкодження, деградація і невизначеність є невід'ємними складовими.

Модель стійкості та резервування системи

Умови воєнного часу, а також зростання складності інфраструктурних систем зумовлюють необхідність розгляду водопровідної мережі не лише з точки зору її працездатності, але і з позицій стійкості. У цьому контексті стійкість розглядається як здатність системи зберігати або відновлювати функціональність за наявності пошкоджень, витоків і зовнішніх впливів.

Виділяються три основні аспекти стійкості:

- функціональна стійкість, що визначається здатністю забезпечувати необхідний рівень водопостачання;
- гідравлічна стійкість, пов'язана зі збереженням допустимих значень тиску;
- топологічна стійкість, яка характеризує структурну зв'язність мережі.

Резервування виступає основним механізмом підвищення стійкості. Воно може реалізовуватися через альтернативні джерела водопостачання, дублюючі гілки трубопроводів або можливість перерозподілу потоків. У математичній моделі це означає наявність додаткових шляхів транспортування води, які можуть бути задіяні у випадку відмови окремих елементів.

Умови працездатності системи можуть бути сформульовані як обмеження на значення напорів і витрат у вузлах мережі. При цьому виділяються критичні вузли, відмова яких призводить до значного погіршення функціонування системи. Такий підхід узгоджується з сучасними концепціями забезпечення стійкості водопостачання, де система розглядається як об'єкт управління ризиками і адаптації до змінних умов [1, с. 100–105; 9, с. 35–38].

Особливе значення має сценарний аналіз, який дозволяє оцінити поведінку системи в різних режимах:

- базовий режим;
- режим із витоком;
- аварійний режим;
- режим із воєнними пошкодженнями.

Такий підхід є аналогічним концепції підсилення конструкцій у механіці, де досліджується поведінка системи при різних типах навантажень. У випадку водопровідних мереж це означає оцінку здатності системи адаптуватися до змін і зберігати працездатність за несприятливих умов.

Методи виявлення та локалізації витоків

Ефективність запропонованої моделі значною мірою залежить від можливості своєчасного виявлення витоків і визначення їх місця розташування. Сучасні методи виявлення витоків можна умовно поділити на кілька груп, які доповнюють одна одну.

Базовим є метод *резидуалів*, що ґрунтується на порівнянні розрахункових і вимірних значень напору:

$$r_i = h_i^{model} - h_i^{real}.$$

Відхилення резидуалів від нуля свідчить про наявність аномалій у системі. Такий підхід широко використовується в поєднанні з гідравлічними моделями та дозволяє виявляти виток безпосередньо на основі розрахункових даних [2, с. 2–4].

Розвитком цього підходу є методи аналізу часових рядів, у яких використовується кореляція між сигналами тиску в різних вузлах мережі. Замість аналізу окремих значень розглядається їх динаміка у часі, що дозволяє виявляти навіть слабкі або поступові виток [13, с. 1–4].

Методи машинного навчання забезпечують більш гнучкий інструментарій для класифікації станів системи. Вони дозволяють врахуву-

вати складні залежності між параметрами та автоматично виявляти аномалії. Дослідження показують високу ефективність таких алгоритмів, як Random Forest, SVM і нейронні мережі, особливо при роботі з великими обсягами даних [6, с. 2–5; 7, с. 1–4; 15, с. 2–6].

Окремий напрям становлять графові методи, які враховують топологію мережі. У таких підходах аналізується структура зв'язків між вузлами, що дозволяє локалізувати витік на основі змін у розподілі тиску та потоків. Використання багатошарових мереж і топологічної інформації значно підвищує точність локалізації [3, с. 1–4].

Порівняння підходів показує, що жоден із них не є універсальним. Детерміновані методи добре інтерпретуються, але мають обмежену чутливість. Data-driven підходи є більш гнучкими, але залежать від якості даних. Графові методи забезпечують точну локалізацію, але потребують детальної інформації про структуру мережі. Саме тому найбільш перспективними є гібридні підходи, які поєднують фізичні моделі з методами аналізу даних [4, с. 1–5; 5, с. 1–4].

2.4. Програмна реалізація моделі та результати чисельного моделювання

Для переходу від теоретичної постановки задачі до прикладного інструмента аналізу в роботі було виконано програмну реалізацію запропонованої моделі засобами Python. Такий вибір зумовлений кількома міркуваннями.

По-перше, Python забезпечує поєднання математичної гнучкості, придатності до чисельного експерименту і зручності візуалізації результатів.

По-друге, саме програмна реалізація дає можливість перейти від концептуального опису системи до серії сценарних розрахунків, що особливо важливо в умовах воєнного часу, коли гідравлічна модель повинна використовуватися для аналізу несприятливих режимів, а не лише для нормальної експлуатації [9, с. 32–38].

По-третє, інтеграція розрахункового ядра, засобів відображення результатів і механізмів варіювання параметрів дозволяє розглядати модель не тільки як аналітичну конструкцію, а як прототип системи підтримки інженерних рішень [4, с. 1–4; 11, с. 4189–4194].

Модель водопостачання в умовах військового стану

4. Опера грівок

R01	1.9
R12	2.2
R23	2.8
R14	2.0
R45	2.5
R53	1.9
R26	3.1
R65	2.3

1. Джерело та попити

Напір джерела H _d _source	62.0
Попит вузла 1	3.6
Попит вузла 2	2.8
Попит вузла 3	3.2
Попит вузла 4	2.1
Попит вузла 5	1.9
Попит вузла 6	1.4

2. Втік і критерії

Вузол витoku	3
Коефіцієнт витoku k	0.016
Позивник витoku n	1.12
Мінімальний напір h _{min}	26.0
Потрібний напір h _{req}	34.0

3. Резервування

Використати резервування

Вузол резерву	5
Напір резерву H _d _backstop	54.0
Опір резервної гілки E _d _backstop	1.7

5. Динаміка, стохастика, деградація

Кількість кроків	24
Крок dt	1.0
Швидкість деградації	0.28
Шум попиту std	0.05
Шум вимірювань std	0.08
Амплітуда шуму попиту	0.08
Seed	42

6. Визображення

Показувати граф мережі

Запустити модель

Текстовий звіт

КІЛЬКІСТЬ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Кількість часових кроків: 24

Крок моделювання dt: 1.000

Параметр витoku k: 0.016

Позивник витoku n: 1.12

Швидкість деградації: 0.280

СЕРЕДНІ ПОКАЗНИКИ ЗА СЦЕНАРІЯМИ

нормальний режим: падача = 3.137, мін. напір = 9.404

Витік: - деградація: падача = 3.489, мін. напір = 8.507, середній витік = 0.266

Витік + резервування: падача = 15.818, мін. напір = 33.175, середній витік = 0.877

РАНЕ ВІВІДЛЕННЯ ВИТОКУ

Найбільш підозрілий вузол: 3

Максимальний середній резидуал: 1.33997

ВИТРАТИ У ГІЛКАХ ДЛЯ КІНЦЕВОГО СЦЕНАРІЯ

q_01 = 6.54544

q_12 = 3.37806

q_23 = 6.79930

q_14 = 1.82314

q_45 = -0.08660

q_26 = -0.12362

q_65 = -1.55163

Рис. 2.2. Інтерфейс програмної реалізації детерміновано-стохастичної моделі системи водопостачання в умовах військового стану

На рисунку 2.2 наведено інтерфейс розробленої програми, у якому реалізовано введення гідравлічних параметрів мережі, характеристик витoku, критеріїв забезпечення споживачів, параметрів резервування та стохастичних складових моделі. Така структура інтерфейсу відображає прийняту архітектуру чисельного експерименту: користувач може варіювати як базові параметри мережі, так і параметри деградації, шуму та сценаріїв аварійного функціонування, після чого програма формує текстовий звіт і графічні результати розрахунку. Зовнішня організація інтерфейсу безпосередньо відображає логіку побудови обчислювального ядра, у якому окремо реалізовано формування структури мережі, розрахунок режимів, моделювання витoku, деградації та резервування.

Програмна модель побудована як модульна система, у якій окремо реалізовано блок формування структури мережі, блок гідравлічного розрахунку, блок моделювання витoku, блок стохастичних збурень, блок сценарного аналізу та блок візуалізації. Така архітектура відповідає логіці, прийнятій у попередніх підрозділах: спочатку задається графова структура водопровідної мережі, далі формується система рівнянь балансу, після чого вводяться тиско-залежні витoki, деградація та резервування. Важливо, що обчислювальне ядро не обмежується одноразовим стаціонарним перерахунком, а дозволяє проводити покрокове чисельне моделювання у часі, що узгоджується з детерміновано-стохастичною постановкою задачі, наведеною у підрозділі 2.2 [1, с. 97–103; 14, с. 30–38].

У програмній реалізації мережа задається як граф із вузлами споживання, основним джерелом і резервним вузлом. Для кожної гілки задаються гідравлічні опори, а для кожного вузла – базове споживання. На цьому рівні програма реалізує класичний баланс витрат і баланс напорів, однак доповнює їх часовою еволюцією параметрів. Напір у вузлах розраховується на кожному кроці моделювання, що дозволяє отримати часові ряди тиску, витрат і показників забезпечення споживачів. Такий підхід відповідає сучасним вимогам до гідравлічного моделювання, відповідно до яких система повинна аналізуватись у змінних режимах, а не тільки в одній розрахунковій точці [9, с. 32–36].

Ключовою особливістю програмної моделі є реалізація тиско-залежного витoku у формі

$q_{\text{leak}} = k \times h^n$, де k – коефіцієнт витoku, а n – показник чутливості витрати до напору. На відміну від спрощених сценарних схем, у яких витік задається як стала додаткова витрата, у програмній реалізації його величина визначається ітераційно на кожному часовому кроці залежно від поточного гідравлічного стану системи. Завдяки цьому модель коректно відтворює нелінійний вплив напору на інтенсивність втрат і узгоджується з прийнятою детерміновано-стохастичною постановкою задачі [8, с. 5–10; 10, с. 14–21]. У програмному сенсі це означає, що витік не задається наперед як жорстко фіксована величина, а визначається ітераційно на кожному часовому кроці через поточний стан системи. Завдяки цьому модель набуває нелінійного характеру і більш адекватно відображає фізику процесу.

Для розв'язання нелінійної задачі використано ітераційну процедуру послідовного узгодження напорів і витoku. На кожній ітерації для поточного наближення напору визначається величина витoku, після чого уточнюється загальний попит у вузлі і повторно розв'язується система рівнянь для всіх напорів мережі. Ітераційний процес завершується після досягнення заданої точності за зміною напорів і витрати витoku. Така схема концептуально близька до підходів, у яких нові значення напору і витoku послідовно перераховуються до виходу на стаціонарне рішення, що прямо відзначається в дослідженнях стохастичних моделей водопровідних мереж із прихованими витокami [14, с. 34–38].

Окремий блок програми призначений для врахування стохастики. У моделі реалізовано три основні типи випадкових збурень: флуктуації попиту, шум вимірювань і часово-змінні параметри деградації. Споживання у вузлах задається не як жорстко стала величина, а як базове значення, помножене на часовий коефіцієнт із гармонічною складовою і випадковим шумом. Це дозволяє моделювати природну мінливість попиту, яка в реальних умовах може маскувати або імітувати витoki. Додатково до цього у модель введено шум вимірювань, що імітує похибки сенсорів тиску і створює передумови для подальшого аналізу резидуалів. Включення таких компонентів відповідає сучасному розумінню водопровідної мережі як стохастичної системи, у якій і попит, і параметри спостереження, і прояви пошкоджень мають випадкову складову [5, с. 563–568; 13, с. 1–4; 14, с. 30–34].

Для опису деградації у програмі передбачено сценарій, у якому з часом зростає ефективний гідравлічний опір гілок, а також змінюються параметри витoku. Це означає, що система поступово переходить від умовно справного стану до режиму ускладненого транспортування води, де одночасно посилюються як втрати напору, так і інтенсивність витoku. У математичному сенсі такий сценарій реалізує ідею накопичення пошкоджень, розглянуту раніше в підрозділі 2.3, але переводить її у чисельну площину. Тут деградація не зводиться до абстрактного ускладнення моделі, а безпосередньо впливає на обчислювані характеристики: середній напір у вузлах, сумарну подачу, обсяг дефіциту та просторовий розподіл витрат у гілках [1, с. 99–104; 14, с. 30–38].

Ще одним принципово важливим елементом програмної реалізації є резервування. У моделі передбачено можливість підключення резервного вузла з власним напором і опором резервної гілки. У розрахунковому сенсі це означає, що в системі формується додатковий шлях подачі води, який може бути активований у сценарії аварії або витoku. Така реалізація є прямим аналогом підсилення конструкції у механічних моделях: замість локального збільшення міцності тут відбувається структурне підсилення мережі за рахунок альтернативного джерела і перерозподілу потоків. Саме тому в чисельних експериментах резервування розглядається не як окремий технічний прийом, а як механізм забезпечення функціональної та гідравлічної стійкості системи [1, с. 100–105; 9, с. 35–38].

У програмі було реалізовано чотири основні сценарії моделювання. *Перший сценарій* відповідає базовому режиму функціонування системи без витoku і без резервування та використовується як еталонний стан для порівняння з аварійними й деградаційними сценаріями. *Другий сценарій* враховує лише витік, що дозволяє оцінити вплив локального дефекту на поле тиску, сумарну подачу та забезпечення споживачів. *Третій сценарій* моделює витік на фоні деградації, тобто поєднує локальну аномалію з поступовим погіршенням параметрів мережі. *Четвертий сценарій* відображає витік за наявності резервування, що дозволяє оцінити ефект альтернативного джерела для компенсації втрат і стабілізації режиму. Такий набір сценаріїв є достатнім для демонстрації основних функціональних властивостей запропонованої моделі і водночас не перевантажує цю роботу надлишковим числом

комбінацій. Він добре узгоджується з підходом, відповідно до якого несприятливі режими мають аналізуватися шляхом варіювання вихідних умов моделі з подальшим порівнянням результатів перерахунку [9, с. 35–38].

Результати чисельного моделювання подаються у кількох взаємодоповнювальних формах.

По-перше, програма формує графіки середніх вузлових напорів за розглянутими сценаріями для різних сценаріїв, що дозволяє простежити зміну гідравлічного режиму під дією витоку, деградації та резервування. Рисунок 2.3 відображає розподіл середніх напорів у вузлах мережі для чотирьох основних сценаріїв: базового режиму, режиму з витоком, режиму “витік + деградація” та режиму “витік + резервування”. Тут вузол 0 – це джерело, тому його високий напір не слід порівнювати зі споживчими вузлами напругу.

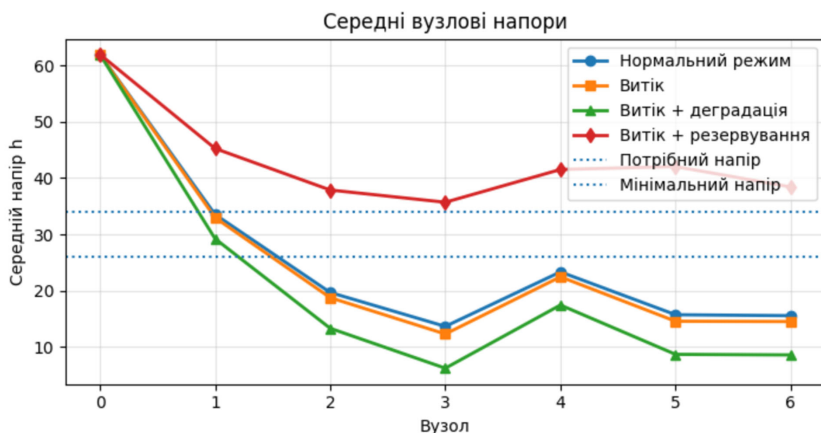


Рис. 2.3. Середні вузлові напори за різних сценаріїв функціонування системи

Графік демонструє, що витік сам по собі знижує рівень напору порівняно з базовим режимом, а поєднання витоку з деградацією трубопроводної мережі призводить до ще більшого падіння тиску в системі. Найбільш критичним виявляється вузол витоку та віддалені

споживчі вузли, де напір знижується нижче мінімально допустимого рівня.

Водночас сценарій резервування принципово змінює картину: підключення резервного джерела підвищує напори в усіх проблемних вузлах до рівнів, що наближаються або перевищують заданий поріг забезпечення. У контексті моделі це підтверджує, що резервування дійсно виконує функцію гідравлічного “підсилення” системи. Разом з тим графік показує, що резервування не усуває причину аварійного режиму, а лише компенсує її гідравлічні наслідки.

По-друге, будуються часові графіки сумарної подачі, які відображають інтегральну реакцію системи на зміну режиму. Рисунок 2.4 відображає часову зміну сумарної подачі в системі для всіх розглянутих сценаріїв. Видно, що в базовому режимі й у сценарії з витокм сумарна подача коливається в близькому діапазоні, що пояснюється обмеженою пропускною здатністю мережі без резервного підживлення. У сценарії “витік + деградація” сумарна подача додатково зменшується, оскільки підвищення гідравлічних опорів та погіршення стану системи призводять до зниження її транспортної спроможності. Найбільш виразно відрізняється сценарій “витік + резервування”, для якого сумарна подача суттєво зростає впродовж усього розрахункового інтервалу. Це свідчить про те, що резервне джерело ефективно підтримує функціонування мережі навіть за наявності аварійного дефекту.

У той самий час така поведінка узгоджується з результатами графіка витрати витоку: збільшення сумарної подачі не означає автоматичного зменшення втрат, а лише відображає здатність системи компенсувати дефіцит ресурсу. Графік відображає інтегральну подачу системи, а не лише корисне споживання.

По-третє, окремо подається динаміка витрати витоку, що є особливо важливим у зв’язку з тиско-залежною нелінійністю дефекту.

Рисунок 2.5 відображає часову зміну витрати витоку в сценаріях “витік”, “витік + деградація” та “витік + резервування”. Отримані криві підтверджують, що витік у моделі є тиско-залежною величиною, а не сталою добавкою до попиту. Саме тому його значення змінюється в часі разом із поточним гідравлічним станом мережі. У базовому сценарії витік коливається навколо певного середнього рівня, що відображає вплив випадкових змін попиту та часової мінливості напору.

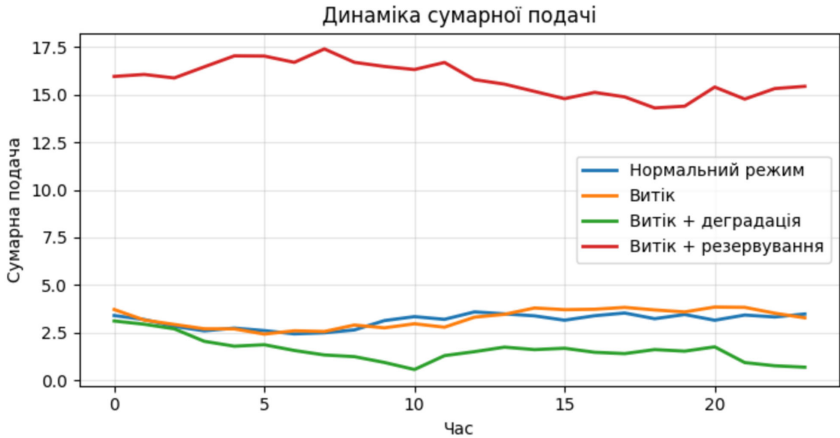


Рис. 2.4. Динаміка сумарної подачі води в системі за різних сценаріїв моделювання

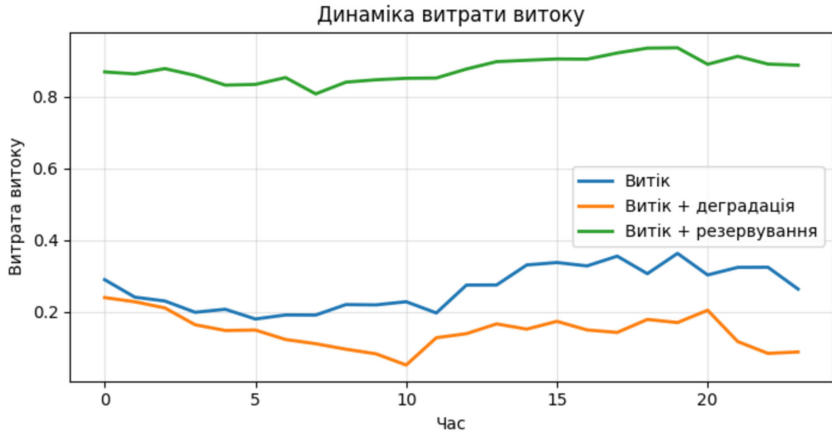


Рис. 2.5. Часова динаміка витрати витіку для різних сценаріїв пошкодження та резервування

Найбільш показовим є сценарій резервування, у якому витрата витіку виявляється найбільшою. Це є фізично обґрунтованим результа-

том: підвищення напору в системі за рахунок резервного підживлення одночасно покращує водозабезпечення споживачів і збільшує інтенсивність втрат через дефект. Сценарій “витік + деградація”, навпаки, демонструє менші значення витіку, що пояснюється істотним зниженням напору в деградованій мережі. Таким чином, графік наочно підтверджує, що резервування та деградація впливають на витік через протилежні механізми: перше збільшує втрати через зростання напору, друге – зменшує їх через ослаблення гідравлічного режиму. Резервування підвищує стійкість системи, але не завжди зменшує втрати через дефект.

По-четверте, формується графова схема мережі з підписами напорів, витрат у гілках і локального дефіциту забезпечення.

Гідравлічна схема мережі в кінцевому сценарії

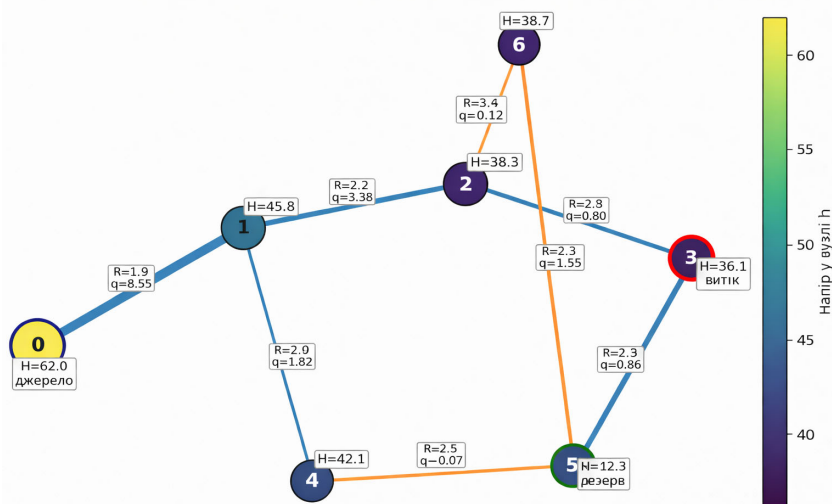


Рис. 2.6. Гідравлічна схема мережі у сценарії “витік + резервування” з розподілом напорів, витрат у гілках та позначенням критичних вузлів

Рисунок 2.6 є підсумковим просторовим поданням результатів чисельного моделювання для фінального сценарію “витік + резервування”. На схемі одночасно відображено напори у вузлах, витрати в окремих гілках, положення джерела, резервного вузла та вузла витоку. Такий формат подання особливо важливий, оскільки дозволяє інтегрувати в одній візуальній моделі кілька типів інформації: топологію мережі, її поточний гідравлічний стан і локалізацію пошкодження.

Найбільш інформативною особливістю рисунка 3.6 є те, що він дозволяє безпосередньо простежити перерозподіл потоків під дією резервування. Вузол 5, позначений як резервний, підтримує напір у правій частині мережі, а від’ємні значення витрат у частині гілок свідчать про зміну напрямку руху води відносно базового задання орієнтації. Це означає, що резервування не просто додає ресурс у систему, а перебудовує її гідравлічну структуру. Особливо показовим є те, що вузол витоку 3 при цьому зберігає відносно високий напір, що узгоджується з графіком динаміки витрати витоку і пояснює збільшення втрат у сценарії з резервним підживленням. Наявність від’ємних витрат на окремих гілках показує, що модель не зводиться до “простого підняття напору”, а реально відтворює структурну перебудову потокорозподілу. У сукупності ці форми подання дозволяють перейти від абстрактної числової інформації до інженерної інтерпретації отриманих результатів [3, с. 1–4; 12, с. 1–4].

Окремої уваги заслуговує блок раннього виявлення витоків. У програмі використано базовий резидуальний підхід, у якому порівнюються розрахункові напори базового режиму з «вимірними» напорами сценарію з витоком. Для кожного вузла обчислюється середній резидуал, а найбільш підозрілий вузол визначається за максимальним абсолютним відхиленням.

Рисунок 2.7 демонструє результати резидуального аналізу, виконаного для вузлів споживчої частини мережі. Найбільше значення середнього абсолютного резидуалу спостерігається у вузлі 3, що повністю узгоджується з параметрами чисельного експерименту, в якому саме цей вузол було задано як місце аварійного витоку. Таким чином, навіть базовий резидуальний підхід виявляється достатньо чутливим для правильної ідентифікації найбільш імовірної зони пошкодження.



Рис. 2.7. Середні абсолютні резидуали у вузлах мережі для раннього виявлення місця витoku

Водночас графік показує, що збурення поширюється і на сусідні вузли, де резидуали також мають підвищені значення. Це відповідає реальній фізиці роботи водопровідної мережі: витік змінює не лише локальний стан одного вузла, а й увесь розподіл напорів у системі. Отже, резидуальна діагностика дозволяє не лише фіксувати факт аномалії, а й оцінювати просторову структуру її впливу.

Така процедура не претендує на вичерпне охоплення всіх сучасних алгоритмів локалізації, але є цілком достатньою для даної роботи, оскільки вона логічно пов'язує чисельну модель з методами виявлення аномалій, розглянутими в попередньому підрозділі. Крім того, цей підхід добре узгоджується з літературними джерелами, де витoki виявляються на основі відмінностей між оціненими та фактичними сигналами тиску [2, с. 2–5; 3, с. 1–4; 13, с. 1–4].

Отриманий комплекс графічних результатів підтверджує, що розроблена програмна реалізація дозволяє не лише відтворювати окремі гідравлічні характеристики системи, а й аналізувати взаємозв'язок між витокom, деградацією, резервуванням і діагностичними ознаками аномального режиму в межах єдиної детерміновано-стохастичної постановки.

З точки зору аналізу отриманих результатів, програмна модель дає можливість оцінювати чутливість системи до зміни параметрів витoku, деградації, шуму попиту і точності вимірювань. Чутливість до коефіцієнта витoku k проявляється насамперед у зміні інтенсивності втрат і масштабі падіння напору в прилеглих вузлах. Чутливість до параметра n відображає ступінь нелінійності реакції системи на зміну тиску. Параметр швидкості деградації визначає темп погіршення умов транспортування води, а шум вимірювань безпосередньо впливає на стійкість резидуального методу. У цьому сенсі модель виступає як інструмент дослідження не лише самих сценаріїв, а й меж застосовності алгоритмів виявлення в реалістичних умовах. Саме такий підхід – поєднання фізичної моделі з аналізом чутливості – є одним із ключових напрямів сучасних гібридних рішень [4, с. 1–6; 5, с. 563–568; 15, с. 1–7].

Висновки

За результатами виконаного дослідження *встановлено*, що моделювання систем водопостачання в умовах воєнного стану потребує переходу від спрощених стаціонарних гідравлічних схем до інтегрованих детерміновано-стохастичних моделей, у межах яких одночасно враховуються зміни напірно-витратного режиму, тиско-залежні витoki, деградація параметрів мережі, невизначеність попиту та потреба в резервуванні. Такий підхід дозволяє розглядати водопровідну мережу не лише як сукупність трубопроводів і вузлів, а як динамічну критичну систему, чутливу до пошкоджень, зовнішніх збурень і сценарних змін режиму роботи [9, с. 32–38; 14, с. 29–38; 1, с. 97–103].

Показано, що класичні гідравлічні та математичні моделі витоків формують необхідну теоретичну основу для аналізу систем водопостачання, однак їх самостійна придатність для опису кризових і після аварійних режимів є обмеженою. Інверсні задачі, тиско-залежні моделі витoku та еквівалентні схеми мережі забезпечують фізично обґрунтовану постановку задачі, але без урахування часової мінливості, стохастичності та деградації не дозволяють адекватно описувати поведінку реальної пошкодженої системи [8, с. 3–10; 10, с. 14–27; 14, с. 30–38].

Обґрунтовано, що включення до моделі процесів пошкодження, деградації та невизначеності параметрів є принципово необхідним

для переходу від ідеалізованої мережі до реальної нестабільної системи. Установлено, що локальні витoki, приховані дефекти та аварійні розриви доцільно розглядати як різні форми розвитку пошкодження, а параметри витoku – як часово-змінні характеристики, пов’язані з накопиченням дефектів і зміною технічного стану мережі [14, с. 30–38; 1, с. 99–104].

Підтверджено, що резервування є ефективним засобом підвищення функціональної та гідравлічної стійкості системи водопостачання, якщо його розглядати як структурно-режимний механізм адаптації мережі до несприятливих умов. Використання резервних джерел, альтернативних шляхів подачі та перерозподілу потоків дозволяє зменшити дефіцит напору в критичних вузлах і знизити вразливість системи до локальних пошкоджень. Водночас чисельне моделювання показало, що резервування не завжди супроводжується зменшенням втрат через дефект: у разі тиско-залежного витoku підвищення напору може призводити до зростання інтенсивності витікання, що підкреслює двостійкий характер компенсуючих режимів [1, с. 100–105; 9, с. 35–38].

Показано, що найбільш перспективним напрямом розвитку систем виявлення та локалізації витоків є поєднання фізично інтерпретованих гідравлічних моделей із сучасними методами аналізу даних. Резидуальні оцінки, аналіз часових рядів, графові методи, машинне навчання та ансамблеві алгоритми доцільно інтегрувати в межах єдиної схеми діагностики, де модель мережі задає фізичну основу, а data-driven інструменти підвищують чутливість і адаптивність виявлення аномалій [2, с. 2–5; 3, с. 1–4; 4, с. 1–6; 5, с. 563–568; 13, с. 1–4; 15, с. 1–7].

Установлено, що програмна реалізація моделі засобами Python забезпечує практичний перехід від теоретичної постановки до чисельного сценарного аналізу. Розроблена програма дозволяє моделювати базовий режим функціонування системи, витік, витік на фоні деградації та витік за умов резервування, аналізувати розподіл напорів і витрат, оцінювати поведінку системи у часі та здійснювати первинне виявлення аномалій. Це підтверджує придатність розробленого підходу як науково-методичного інструмента для дослідження стійкості систем водопостачання в умовах воєнних і після аварійних впливів [9, с. 32–38; 11, с. 4189–4204].

Отже, основним результатом роботи є розроблення узгодженої детерміновано-стохастичної моделі системи водопостачання, яка поєднує класичну гідравліку, тиско-залежні витoki, деградацію, резервування та засоби раннього виявлення аномалій у єдину методологічну систему. Саме така інтеграція усуває розрив між розрахунковими гідравлічними схемами, стохастичним описом пошкоджень і прикладними засобами діагностики, створюючи підґрунтя для подальшого розвитку моделей підтримки рішень у сфері водопостачання за умов підвищеної невизначеності та зовнішніх загроз [9, с. 35–38; 14, с. 30–38; 15, с. 1–7].

Перспективи подальших досліджень пов'язані з калібруванням моделі за натурними даними, розширенням її на реальні міські мережі, урахуванням складніших сценаріїв руйнування та дефіциту ресурсів, а також із розвитком гібридних систем, у яких гідравлічні моделі, машинне навчання, графова локалізація та байєсівське оновлення оцінок стану працюватимуть у межах єдиного цифрового середовища [3, с. 1–5; 5, с. 563–568; 11, с. 4189–4204; 15, с. 1–7].

References:

1. Al Husein, F. K., Syazali, M., Saidat, S., Irsalinda, N., & Farid, F. (2024). The conceptual model to improve failure risk management in water distribution systems using an ordinary differential equation model to support water resilience in military residential facilities. *International Journal of Applied Mathematics, Sciences, and Technology for National Defense*, 2(3), 93–110. <https://doi.org/10.58524/app.sci.def.v2i3.341>
2. Alves, D., Blesa, J., Duviella, E., & Rajaoarisoa, L. (2021). Robust data-driven leak localization in water distribution networks using pressure measurements and topological information. *Sensors*, 21(22), 7551. <https://doi.org/10.3390/s21227551>
3. Barros, D., Zanfei, A., Menapace, A., Meirelles, G., Herrera, M., & Brentan, B. (2024). Leak detection and localization in water distribution systems via multilayer networks. *Water Research X*, 26, 100280. <https://doi.org/10.1016/j.wroa.2024.100280>
4. Bermúdez, J.-R., Gómez-Coronel, L., López-Estrada, F.-R., Besançon, G., & Santos-Ruiz, I. (2024). A hybrid data-driven and model-based approach for leak reduction in water distribution systems using LQR and genetic algorithms. *Processes*, 12(9), 1805. <https://doi.org/10.3390/pr12091805>
5. Chatterjee, S., Chattopadhyay, S., Mahadarsakaran, H., et al. (2026). Early detection of DMA-level leaks in water networks using a robust regression ensemble framework. *Water*, 18(5), 563. <https://doi.org/10.3390/w18050563>

6. Joseph, K., Abraham, S., Joseph, V. M., Chauhan, N., & Vijaya Kumar, N. (2024). Leak and burst detection in water distribution networks using logic- and machine-learning-based approaches. *Water*, 16(14), 1935. <https://doi.org/10.3390/w16141935>
7. Joseph, K., Abraham, S., Mathew, L., et al. (2025). Early leak and burst detection in water pipeline networks using machine-learning approaches. *Water*, 17(14), 2164. <https://doi.org/10.3390/w17142164>
8. Koppel, T., Ainola, L., & Puust, R. (2007). A mathematical model for the determination of leakage in mains and water distribution networks. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. Engineering*, 13(1), 3–16.
9. Kravchenko, O., Potapenko, S., Kuba, T., & Arhatenko, T. (2023). Requirements for hydraulic modeling of wartime water supply networks and for CBRN pollution risk management. *Problems of Water Supply, Sewerage and Hydraulics*, 45, 32–38. <https://doi.org/10.32347/2524-0021.2023.45.32-38>
10. Levin, S. J. (2019). An evaluation of the pressure-leakage response of selected water distribution networks in South Africa (Master's thesis). University of Cape Town.
11. Molina, J.-L., Patiño-Alonso, C., Wan, X., & Farmani, R. (2025). SHIELDS stochastic early leakage detection system for water distribution networks. *Water Resources Management*, 39, 4189–4204. <https://doi.org/10.1007/s11269-025-04158-x>
12. Santos-Ruiz, I., López-Estrada, F.-R., Puig, V., Valencia-Palomo, G., & Hernández, H.-R. (2022). Pressure sensor placement using information theory for leak localization in water distribution networks. *Sensors*, 22(2), 443. <https://doi.org/10.3390/s22020443>
13. Shao, Y., Li, X., Zhang, T., Chu, S., & Liu, X. (2019). Time-series-based leakage detection using multiple pressure sensors in water distribution systems. *Sensors*, 19(14), 3070. <https://doi.org/10.3390/s19143070>
14. Tevyashev, A., Matviyenko, O., & Nikitenko, G. (2019). Construction of a stochastic model for a water supply network with hidden leaks and a method for detecting and calculating the leaks. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6(4(102)), 29–38. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.186157>
15. Zuñiga-Urbe, M., Rojas-Galván, R., Álvarez-Alvarado, J. M., Aviles, M., Pérez-Soto, G. I., & Pérez-Moreno, V. (2026). Artificial intelligence in water distribution networks: A systematic review of models, input variables, databases, and output strategies for leak detection. *Smart Cities*, 9(3), 45. <https://doi.org/10.3390/smartcities9030045>