

Myroslav Yaremyk
*PhD in Economics, Docent,
Associate Professor at the Department of Marketing and Logistics
Lviv Polytechnic National University*

Яремик М.І.
*кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри маркетингу і логістики
Національного університету «Львівська політехніка»*

DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-703-1-36>

**MATHEMATICAL MODELLING OF INTERNAL AND
INTERNATIONAL LOGISTICS BASED ON COLOURED PETRI
NETS AS A TOOL FOR MANAGEMENT OPTIMISATION AND
ENSURING THE MARKETING SUSTAINABILITY
OF AN ENTERPRISE**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНЬОЇ
ТА МІЖНАРОДНОЇ ЛОГІСТИКИ НА БАЗІ КОЛЬОРОВИХ
МЕРЕЖ ПЕТРІ ЯК ІНСТРУМЕНТ ОПТИМІЗАЦІЇ
МЕНЕДЖМЕНТУ ТА ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАРКЕТИНГОВОЇ
СТІЙКОСТІ ПІДПРИЄМСТВА**

Сучасний ринок розвивається в умовах значної мінливості, зростання вимог до індивідуалізації замовлень і глобалізації каналів збуту. Для компаній B2B, зокрема виробників персоналізованого пакування та етикетної продукції, якісний логістичний менеджмент напряму формує маркетингові конкурентні переваги. Коли процеси друку, складського зберігання та доставки працюють неузгоджено, то це спричиняє зрив строків виконання замовлень, а в маркетинговому вимірі означає зниження лояльності клієнтів і втрату частки ринку.

Особливої актуальності проблема набуває в умовах транскордонних криз, логістичних колапсів на кордонах та сезонних коливань попиту (передсвяткові періоди). Для забезпечення стійкості бізнесу менеджменту потрібен інструмент предиктивного моделювання. Найбільш ефективним апаратом є кольорові мережі Петрі (Coloured Petri Nets – CPN), оскільки вони дозволяють візуалізувати та проаналізувати паралельні, асинхронні та розподілені процеси, які притаманні складським і транспортним операціям поліграфічних підприємств та видавництв [1, 2].

Для побудови моделі логістичної системи підприємства визначимо множину базових типів даних (кольорів маркерів) [1]. Будь-яке замовлення чи товарна партія описується системою індексів:

- $I = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ – асортиментна матриця продукції (маркетинговий портфель).
- $J = \{j_1, j_2, \dots, j_M\}$ – види технологічних операцій друку та обробки (виробничі ресурси менеджменту).
- $R = \{r_1, r_2, \dots, r_K\}$ – географія ринків збуту чи країн постачання (міжнародні канали маркетингу);
- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_L\}$ – множина типів транспортних засобів (логістичні ресурси доставки).

На основі цих індексів у моделі CPN формуються два ключові складені типи кольорів (Color Sets), які описують матеріальні та транспортні потоки:

PRODUCT_PROFILE – це тип кольору, що описує характеристики матеріального потоку продукції (коробок, етикеток) у логістичному ланцюзі. Представляє собою кортеж виду:

$$Color\ PRODUCT_PROFILE = I \times J \times R$$

Кожен маркер у мережі має вигляд кортежу (i, j, r) . З позицій менеджменту індекс j дозволяє контролювати завантаження потужностей та міжцехові запаси. З позицій маркетингу індекс r визначає пріоритетність клієнта та вимоги до термінів доставки у конкретну країну.

TRANSPORT_RESOURCE – це тип кольору, який описує доступні логістичні ресурси для транспортування як кортеж

$$Color\ TRANSPORT_RESOURCE = V \times R$$

Маркер вигляду (v, r) означає наявність вільної машини типу v , призначеної або зафрахтованої під логістичний напрямок r . З позицій менеджменту індекс v управляє структурою витрат на фрахт, а з позицій маркетингу, він визначає пропускну здатність каналу розподілу. Наприклад, токен (Бус, Польща) вказуватиме менеджменту, що є вільна невелика вантажівка, готова взяти замовлення суто на польський хаб.

Модель описується матрицею інцидентності $D = D^+ - D^-$, яка пов'язує 7 ключових станів (позицій P) та 3 логістичні операції (переходи T):

– рядки відображають стани: p_1 (склад сировини), p_2 (вільне обладнання), p_3 (Напівфабрикати), p_4 (Вільні місця на складі), p_5 (Склад готової продукції), p_6 (Вільний транспорт), p_7 (Транспортування чи Товари в дорозі);

– по стовпцях відкладають переходи: t_1 ($t_{друк}$) – виробництво/друк), t_2 ($t_{склад}$) – складське приймання), t_3 ($t_{дост}$) – відвантаження та доставка).

Таблиця 1

Матриця інцидентності D

Перехід (Т) Позиція (Р)	$t_1 (t_{\text{дорук}})$	$t_2 (t_{\text{склад}})$	$t_3 (t_{\text{доом}})$
p1 (склад сировини)	$-(i, r)$	0	0
p2 (вільне обладнання)	$-j + j'$	0	0
p3 (напівфабрикати)	$+(i, j, r)$	$-(i, j, r)$	0
p4 (вільні місця на складі)	0	-1	+1
p5 (готова продукція)		$+(i, j, r)$	$-(i, j, r)$
p6 (вільний транспорт)	0	0	$-(v, r)$
p7 (товари в дорозі)	0	0	$+(i, j, r, v)$

Зміна маркувань складів та транспортних ліній на кожному етапі розраховується через фундаментальне векторне рівняння стану:

$$M_k = M_{k-1} + D \cdot u_k ,$$

де u_k – стовпець, розмірність якого дорівнює кількості переходів у моделі, а його елементи приймають бінарні значення $\{0, 1\}$. Практичне значення його полягає у цифровому відображенні поточних управлінських рішень та операційних подій на підприємстві в момент часу k .

Формалізація стохастичних затримок на митниці як фактору маркетингового ризику.

Для маркетингу важливим є своєчасна доставка замовлення та в повному обсязі. Однак досвід міжнародної логістики засвідчує, що на кордонах трапляються нетипові затримки. Прикладом таких явищ можуть бути позаминулорічні страйки фермерів або передсвяткові логістичні колапси.

У моделі час виконання переходу доставки $t_{\text{доом}}$ визначається як сума детермінованого часу руху та стохастичної величини митної затримки:

$$\tau_{\text{total}}(v, r) = \tau_{\text{move}}(v, r) + \xi_{\text{customs}}(r, S, H) ,$$

де: $\tau_{\text{total}}(v, r)$ – детермінований час руху транспорту типу v до країни r ;

$\xi_{\text{customs}}(r, S, H)$ – випадкова величина, яка характеризує митні затримки через існування форс-мажорних факторів S або сезонних піків H . Вона описується змішаним лог-нормальним розподілом ймовірностей:

$$\xi_{\text{customs}}(r, S, H) = \omega_1 \cdot f_{\text{normal}}(\xi, \mu_1, \sigma_1^2) + \omega_2 \cdot f_{\text{discr}}(\xi, \mu_2, \sigma_2^2)$$

Вибір лог-нормального розподілу обґрунтований його математичними властивостями, а саме додатною (правосторонньою) асиметрією та високим додатним ексцесом. Асиметрія відображає логістичну реальність: час оформлення не може бути від'ємним оскільки існує жорсткий технологічний мінімум, але наявний довгий «хвіст» імовірностей тривалих затримок. Високий ексцес моделює підвищену

ймовірність існування надзвичайних непередбачуваних обставин, що є критично важливим для ризико-орієнтованого менеджменту.

де: $f_{normal}(\xi, \mu_1, \sigma_1^2)$ – лог-нормальний розподіл для штатного режиму (середній час очікування μ_1 становить кілька годин);

$f_{discr}(\xi, \mu_2, \sigma_2^2)$ – зміщений розподіл із високим математичним сподіванням $\mu_2 \geq 48$ годин) та високою дисперсією σ_2^2 .

ω_1, ω_2 – вагові коефіцієнти, які динамічно змінюються через сторожові умови переходу мережі Петрі залежно від зовнішніх факторів:

– **фактор сезонного маркетингового піку (H):** якщо календарний час моделі наближається до святкових днів (наприклад, Різдва) то вага критичного стану (ω_1) автоматично зростає від 0,05 до 0,65, сигналізуючи про різке зниження ймовірності вчасної доставки.

– **фактор форс-мажорних блокувань (S):** при введенні маркера кризи (страйку чи інших затримок $S=1$ для відповідного напрямку r , модель повністю переходить на розподіл $f_{discr}(\xi, \mu_2, \sigma_2^2)$ із критичним зсувом графіка доставки праворуч.

Для балансування цілей менеджменту та маркетингу критерій оптимізації системи формулюється як мінімізація загальних логістичних витрат за умови жорсткого дотримання маркетингового стандарту обслуговування клієнтів:

$$\min Z = \sum_k (C_{prod}(u_k) + C_{storage}(M_k) + C_{transit}(u_k))$$

за математичних обмежень:

Обмеження менеджменту:

$M_k(p_4) \geq 0$ – недопущення переповнення складу готової продукції);

$\sum_k u_k(t_1) \leq \text{Потужн}_{max}$ – відповідність виробничій потужності друкарського обладнання (Потужн_{max}).

Обмеження маркетингу:

$$P(\tau_{total}(v, r) \leq T_{контр}) \geq \alpha,$$

де: $T_{контр}$ – дедлайн за договором із замовником;

α – заданий рівень надійності (зазвичай $\alpha=0,95$).

Для впровадження моделі в практичну діяльність пропонується інтеграція математичної моделі на базі кольорових мереж Петрі (CPN) в інформаційне середовище підприємства ERP-системи підприємства, що перетворює модель з теоретичного апарату на динамічний інструмент прийняття рішень. Процес інтеграції реалізується на рівні архітектури даних, де стани бази даних ERP транслуються у маркери мережі Петрі, а обчислювальне ядро моделі повертає в ERP оптимізовані графіки та керуючі команди.

Таким чином, модель на базі CPN при її інтеграції в ERP- систему дозволяє менеджменту знаходити оптимальну послідовність векторів керування $\setminus(u_{\{k\}}\setminus)$ (тобто такий графік друку та відвантажень), за якого

фінансові витрати підприємства Z будуть мінімальними, склад не переповниться, а клієнти отримають товар вчасно.

Література:

1. Агутін М. М. Моделювання процесів рекламного просування з використанням кольорових мереж Петрі. *Modeling and Information System in Economics*. 2022. № 102. DOI: <https://doi.org/10.33111/mise.102.1>
2. Peterson James P. Petri Net Theory and the Modeling of Systems. – Michigan: Prentice-Hall, 1981. 290 p. URL: <https://dl.icdst.org/pdfs/files3/2bf95f7fde49a09814231bbcbe592526.pdf3>.